ESAME DI GEOMETRIA E ALGEBRA – CORSO M

LAUREA Ing. \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_22 Gennaio 2018 – Traccia I

COGNOME\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_NOME\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

NUMERO MATRICOLA:\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Q1) Si dia la definizione di matrice diagonalizzabile e si enunci una condizione affinché una matrice quadrata sia diagonalizzabile.

Q2) Dimostrare che se è una base dello spazio vettoriale V(K), ogni vettore di V(K) si può esprimere in unico modo come combinazione degli elementi della base.

Q3) Discutere il sistema



al variare di k in R e calcolare le soluzioni nel caso k = - 1.

Q4) Data l’applicazione così definita f(x,y,z) = (x + z, x – y, x +2y + z):

1. dimostrare che f è un’applicazione lineare;
2. calcolare Im(f), una sua base e la dimensione;
3. calcolare Ker(f), una sua base e la dimensione.

Q5) Data la conica di equazione x2 +2xy – y2 + 2x +2y = 0,

1. classificare la conica (specie e genere);
2. calcolare la sua equazione canonica.

Q6) Sia S3 lo spazio euclideo nel quale è fissato un riferimento cartesiano ortogonale RC(O,x,y,z).

1. Calcolare l’equazione del piano passante per P0(1,-1,2) e perpendicolare alla retta



1. Calcolare gli eventuali punti P di s aventi distanza  dal piano

FOGLIO DELLE RISPOSTE

(Q1) Una matrice quadrata A si dice diagonalizzabile se

.

Una matrice quadrata di ordine n è diagonalizzabile se ammette n autovalori reali con molteplicità algebrica uguale alla molteplicità geometrica

(Q2) (Sul foglio)

(Q3)

* Sistema indeterminato: ;
* Sistema determinato: mai;
* Sistema incompatibile: mai.

Soluzioni nel caso k = -1:

(Q4)

1. (Dimostrazione sul foglio)
2. dim Im(f) =3;
3. Bker(f) = //; dim Ker(f) = 0.

(Q5)

1. Specie:Iperbole, Genere:Non degenere
2. Equazione canonica:

(Q6)

1. Equazione di

SOLUZIONE

(Q1) Una matrice quadrata A si dice diagonalizzabile se

.

Una matrice quadrata di ordine n è diagonalizzabile se ammette n autovalori reali con molteplicità algebrica uguale alla molteplicità geometrica.

(Q2) Sia una base dello spazio vettoriale V(K).

Poiché è un sistema di generatori di V(K),

Dimostriamo che la combinazione è unica.

Se esistesse

Dunque, l’asserto.

(Q3) E’ dato il sistema



Le matrici associate al sistema sono:

e

Considerata la matrice A, si ha:

.

Discussione

1. soluzioni.
2. Per nessun valore di k il sistema è determinato o impossibile.

Calcoliamo le soluzioni del sistema

si ha:

;

,

Quindi, per k = -1:

(Q4) (a) Sia così definita f(x,y,z) = (x + z, x – y, x +2y + z).

Dunque, f è lineare.

Poiché

i tre vettori sono linearmente indipendenti:

* una base è
* dim Im(f) = 3.

.

(Q5)

(a) E’ data la conica di equazione x2 +2xy – y2 + 2x +2y = 0.

Le matrici associate alla conica sono:

Poiché la conica è un’iperbole e poiché la conica è non degenere.

1. Calcoliamo gli autovalori di A00.

.

L’equazione canonica dell’iperbole è

la cui matrice associata è

Imponiamo che

Quindi, l’equazione canonica dell’iperbole è

(Q6)

(a) Calcoliamo come primo passo i parametri direttori della retta



Considerata la matrice dei coefficienti

si ha:

Quindi, il piano passante per P0 e perpendicolare alla retta s ha equazione

1. Il generico punto P di s ha coordinate

.

Imponiamo che